

# 有限要素法による電磁場運動連成解析

亀有 昭久 (サイエンスソリューションズ株式会社)

## A Study on Electromagnetic coupling with motion using Finite Element Method

Akihisa Kameari (Science Solutions International Laboratory, Inc.)

### Abstract

In the paper, a calculation method for the electromagnetic coupling with motion is presented using Finite Element Method. The finite element mesh is deformed with the motion and the equations for the electromagnetic field and the dynamic motion are solved iteratively in each time step. The TEAM Workshop Problem 28 (An Electrodynamic Levitation Device) is solved and the solutions have agreed with measured values. The effects of the iterative method and the theta parameters are searched.

キーワード：有限要素法、電磁場運動連成、メッシュ変形、磁気浮上

(Keyword: Finite Element Method, Electromagnetic Field Coupling with Motion, Mesh Deformation, Magnetic Levitation)

### 1. はじめに

各種電気機器、例えばモータ、発電機、各種アクチュエータやプランジャ等、において、その動特性を解析するためには、電磁場解析だけでなく、運動との連成解析が必須である。有限要素法による電磁場解析は、その解析負荷が大きくなりがちであり、さらに、運動方程式を連成させることは容易なことではない。多くの機器においては、運動は直線や回転運動の自由度が1自由度の運動に限られていることを多く、ここでは、有限要素法による電磁場解析と、1自由度の運動との連成解析法について述べ、その一例として、TEAM Workshop 問題 28 (Electrodynamic Levitation Device)<sup>(1)(2)</sup> についての解析結果を報告する。

有限要素法による電磁場解析において、運動を取り扱う場合、固定部と可動部の位置関係が時間的に変化し、有限要素メッシュの再構成が時刻毎に必要となる。筆者等は、回転機やリニアモータ等における直線あるいは回転に対し、スライド法を提案し、実用解析に供してきた<sup>(3)</sup>。しかし、スライド法は、空気層を挟んだ滑り運動を解析するためには有効であるが、磁極間の間隔が変化するような各種アクチュエータの解析には適用できない。

メッシュの再構成法としては、何らかの自動化されたメッシュ分割法が必要となる。ここでは、二つの与えられたメッシュの内そうにより各時刻のメッシュを再構成する方法を採用する<sup>(4)</sup>。デラウニ4面体分割法による完全な自動分割法<sup>(5)</sup>も考えられるが、計算時間が必要とされることが予想され、また、6面体要素に適用

が容易でないことにより、採用しなかった。

内そう法によるメッシュ再構成においては、移動する節点に対し、両端の位置を入力しておき、各時刻の節点位置を内そうにより求め、移動させて行く。この場合、変形によるマトリックスコネクションの変化はなく、各時刻において変形した要素の要素マトリックスの計算と全体マトリックスへの組み込みが必要なだけで、計算負荷も小さい。ただ、磁極間のギャップ間隔が大きく変化するような運動においては、要素の変形が大きくなり、精度の低下や勾配法の収束悪化が予想される。

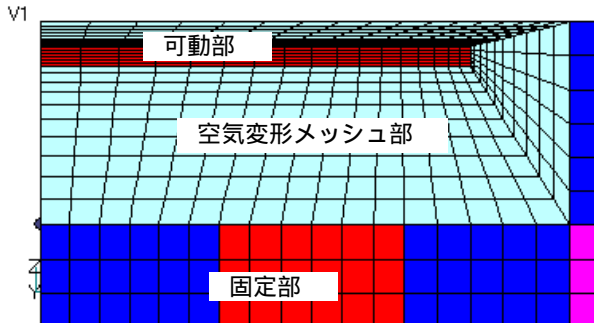
### 2. 解析法

#### 2.1. メッシュの設定

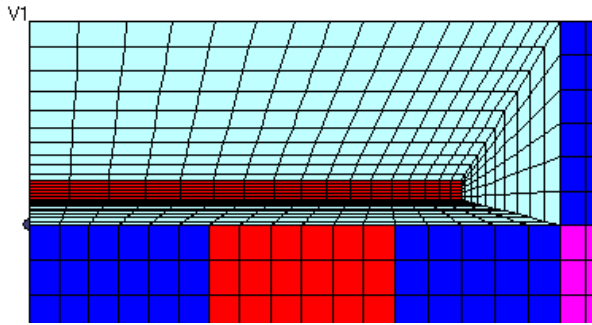
モデル領域を時間的に動かない固定部、剛体運動する可動部および、固定部と可動部の間でメッシュの形状の変化する変形メッシュ部に分ける。可動部は、剛体的に1方向に変位するとする。メッシュデータは、可動部の動きうる範囲を含む両端でのメッシュを与える。運動中の中間でのメッシュは、可動部の位置により内そうされる。どちらかの入力メッシュのデータは、変位する節点の座標だけで充分である。メッシュの変形する領域は空気であるとする。要素、節点のコネクションは、両メッシュで同じとする。

#### 2.2. 電磁場の解析

電磁場は、辺要素を用いた A- $\phi$ 法有限要素法<sup>(6)</sup>で解かれる。固定部および可動部は、それぞれに固定された



(a)可動部最上位メッシュ



(b)可動部最下位メッシュ

図1. 変形メッシュの設定

運動座標系で解かれる。また、変形部は空気であるため、静磁場を解くだけで充分である。このため、各領域で、

$$\nabla \times \frac{1}{m} \nabla \times \mathbf{A} + s(-\dot{\mathbf{A}} + \nabla \phi) = -\mathbf{j}_s \quad (1)$$

が解かれる。ここで、 $\mathbf{A}$  は磁気ベクトルポテンシャル、 $\phi$  は電気スカラーポテンシャル $\phi$ の時間積分であり、それぞれ、辺要素および節点要素で内そう近似される。 $m$  および  $s$  は透磁率と電気伝導率である。変形領域を含む非導電性領域では時間時間微分項がなく、場は  $\mathbf{A}$  のみにより表現される。 $\mathbf{j}_s$  は電流ソース項を表す。

式(1)で注意する事は、運動項が現れないことである。固定部および可動部は運動座標系で定義されており、変形部は静磁場を解くだけで充分であり、速度項は現れない。各領域の接合は、 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$  (すなわち  $\mathbf{A} \times \mathbf{n}$ ) および  $\mathbf{H} \times \mathbf{n}$  の連続条件を課せばよい。前者は強制境界、後者は自然境界条件で課すこととなる。式(1)は見かけ上も、また解法上も運動のない場合と全く同じである。

式(1)を、ガラーキン法で弱定式化し離散化すると、次のマトリックス表現が得られる。

$$\mathbf{H}\mathbf{a} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{f} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{H}$  および  $\mathbf{C}$  は非負値対称行列である。 $\mathbf{a}$  は辺と節点に割り当てられた未知数ベクトルであり、 $\mathbf{f}$  はソース項を表し、時間に依存した既知のベクトルである。運動がある場合、 $\mathbf{H}$  は時間に依存し、各時刻で更新される。ただし、マトリックスのコネクションは変わらない。このことは、非線形磁性体を含む過渡解析でも同様である。式(2)の時間方向の離散化は、 $\theta$ 法を用い、

$$\left( q\mathbf{H}^n + \frac{1}{dt}\mathbf{C} \right) \mathbf{a}^n = \left\{ -(1-q)\mathbf{H}^{n-1} + \frac{1}{dt}\mathbf{C} \right\} \mathbf{a}^{n-1} + q\mathbf{f}^n + (1-q)\mathbf{f}^{n-1} \quad (3)$$

と表される。ここで、 $n$  は時間ステップを表し、 $dt$  はステップ間隔を表す。式(3)の右辺項はステップ  $n-1$  で既知であり、ステップ  $n$  の未知ベクトル  $\mathbf{a}^n$  を求めることができる。ただし、メッシュが変形する運動がある場合、 $\mathbf{H}^n$  は時刻  $n$  でのメッシュ位置が求まって始めて与えられる量であり、後で述べる運動方程式と連成させる必要がある。

上では、固定部に磁性体や導体が含まれる一般の場合について述べたが、後で述べる TEAM Workshop 問題 28 のような、磁場発生源のコイルが空芯でその印可磁場が Bio-Savart 則で計算できる場合は、変形磁気ポテンシャルを用い、メッシュ全体が可動部と一体となって運動し、コイル磁場を印可項として解析することができる<sup>(7)</sup>。この場合、メッシュの変形はなく、運動による全体行列の時間的な変化はないが、メッシュと、磁場源との位置関係が変わるため、磁場ソース項は各時刻で変動する。すなわち、式(3)で  $\mathbf{f}^n$  が可動部の位置に依存し、この項を通じて運動方程式と連成される。

### 2.3. 電磁力の計算

磁場が求まると可動部に働く電磁力を、節点力法<sup>(7)</sup>で求める。今の場合、剛体運動を考えており、トータル電磁力を求めるだけで充分であり、積分範囲を可動部表面あるいは可動部を囲む空気領域内の面の外側一層(この層も空気量域である必要がある)に限り、表面上の節点に対する節点力を加算すれば、トータルの電磁力が求まる。

すなわち、

$$\mathbf{F} = \sum_n \mathbf{f}_n = - \sum_n \int (T \nabla w_n) dV \quad (4)$$

を計算すればよい。ここで、 $n$  は上で示した表面上の節点であり、 $w_n$  はその節点に対する通常の節点形状関数である。 $T$  は Maxwell の応力テンソルであり、積分範囲が空気領域であることを考えると

$$T_{ij} = H_i B_j - \frac{1}{2} d_{ij} \mathbf{H} \mathbf{B} \quad (5)$$

で表すことができる。当然、 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ の関係がある。回転運動の場合は、回転中心よりの節点までのベクトルを節点力と外積を取り、積算しトータルトルクを求める。

上で示した、可動部を取り囲む面は原理的には、可動部表面から固定部表面より一層離れた面のいずれでも結果が同じになるものであるが、離散誤差を含み差異が生ずる場合がある。磁性体を含むよう場合で、磁場が角点等に集中する場合は、磁性体表面から離れた面を取った方が精度が良くなる。この事情は、Maxwell 応力を表面積分する、いわゆる Maxwell 応力法と同様である。

#### 2.4. 運動方程式

ここでは、1自由度の運動を取り扱い、可動部の位置および速度を  $x$  および  $v$  で表すと、一般的に運動方程式は次のように表される。

$$\begin{aligned} M\dot{v} &= F = F_{mech} + F_{em} \\ \dot{x} &= v \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $M$ は質量であり、 $F_{mech}$ は電磁力以外の機械力で一般に位置および速度の関数である。また、 $F_{em}$ は電磁力であり、2.3節で求められるものである。

式(6)を $\theta$ 法的方式で時間方向に離散化する。

$$\begin{aligned} \frac{M}{dt}(v^n - v^{n-1}) &= qT^n + (1-q')F^{n-1} \\ \frac{1}{dt}(x^n - x^{n-1}) &= q'v^n + (1-q)v^{n-1} \end{aligned} \quad (7)$$

一般に、式(3)における $q$ と式(7)の $q'$ は異なっても良いと考えられる。 $q' = 0.5$ とすれば、中間差分による通常のオイラー法である。

式(7)の右辺の $F^n$ が与えられれば、ステップ $n$ の速度と位置を、前ステップの量から計算することができる。しかし、一般には、 $F^n$ はステップ $n$ の位置および速度の関数であり、また電磁力の計算にはその時点での磁場解析結果が必要とされる。従って、(3)および(7)式は連成して解く必要がある。

#### 2.5. 電磁場方程式と運動方程式の連成

計算時間ステップを十分に小さいものとすれば、 $F^n = F^{n-1}$ とおくことにより、式(3)と式(7)を分離し、(3)と(7)を一ステップで連続的に解くことで充分かと思われる。ただ、式(3)の電磁場方程式を解く計算時間は一般に大きく、時間ステップをあまり多いものにするこ

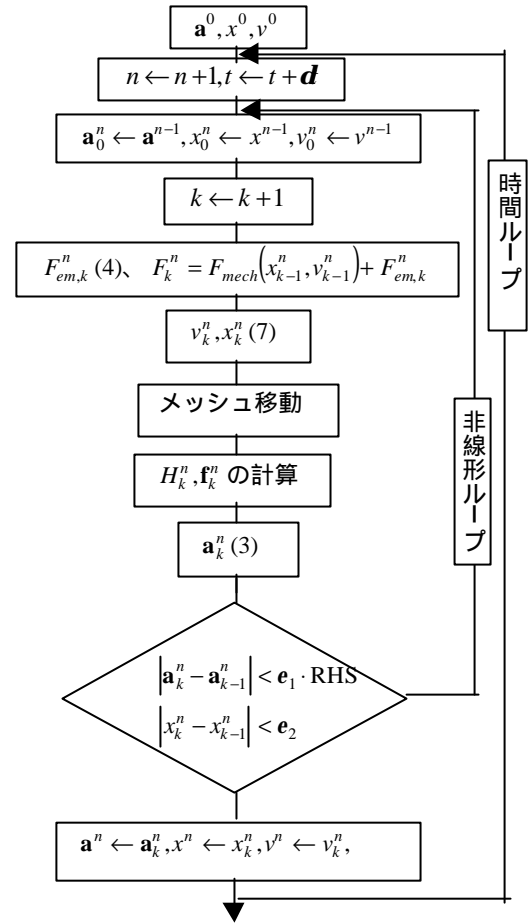


図2 . 電磁場と運動連成計算フロー

とは好ましくない。ここでは、繰り返し収束法により、式(3)と式(7)を整合させて解くことを考える。概略の計算フローを図2に示す。図中 $n$ は時間ステップを表し、 $k$ は非線形繰り返しステップを表す。 $e_1$ および $e_2$ はそれぞれ、磁場計算および運動位置に対する収束判定値である。

図2では、時刻ステップループの内部の非線形ループで、電磁場方程式と運動方程式を繰り返し計算し、収束させる。一般には、運動方程式による非線形性だけでなく、磁気非線形性や外部回路非線形性を解くNewton-Raphson法の繰り返しもこの同じループで行う。すなわち、 $H_k^n$ の更新には、メッシュの移動によるマトリックスの変化だけでなく、Newton-Raphson法のマトリックス再構成も行う。このため、磁気非線形性と運動方程式は同時に収束して行き、一般に運動方程式の収束は早く、それを加えたことに寄る計算時間の増加はわずかである。

### 3. TEAM Workshop 問題 28 の解析

#### 3.1. 解析モデル

ここで述べた手法を検証するため、TEAM Workshop 問題 28 を解く。本問題は、導体板を交流励磁されたコイルの上で浮かす問題であり、渦電流磁場解析と、運動方程式を連成させて解く必要がある。解析体系は軸対称であり、磁場解析は 2 次元軸対称解析で充分であり、また、運動は上下方向の 1 自由度運動である。図 3 にモデル寸法等を示す。アルミ板は 130mmφ、3mmt の円盤であり、その導電率は $\sigma=3.57 \cdot 10^7 \text{S/m}^{(1)}$ とされている。(  $3.40 \cdot 10^7 \text{S/m}^{(2)}$ ともあるが、前者の方が計測と解析の一致がよいので前者を採用する )。質量は 0.107kg で空気による粘性等はないものとする。アルミ板の位置はコイル上端と板下面の間の距離で表され、初期条件は位置  $z=3.8\text{mm}$  に静止しておかれる。コイルには 50Hz で 20A の交流電流が流される。解析では、時刻ゼロより正弦波が加わるとする。

ここでは、下の二つの手法で解析比較し、本手法の妥当性を評価する。

手法 1 : アルミ板の運動をその周りの空気領域のメッシュ変形で与える。コイルをメッシュに含め電流源を与える。

手法 2 : 変形磁気ポテンシャルを用いる方法で、コイル磁場を励磁源としてとして与える。メッシュの変形を伴わない。この場合、コイルはメッシュとして含める必要がない。

両手法で用いるメッシュ分割図を図 4 , 5 に示す。アルミ板は、厚さ方向に 6 層 (手法 1 )、10 層 (手法 2 ) に分割している。図 4 はアルミ板が最下端にあるときのメッシュであり、最上端のメッシュは図 1 のように与えられる。ここでは、無限要素境界<sup>®</sup>を使っており、解析領域を小さく取っている。2 次元軸対称解析

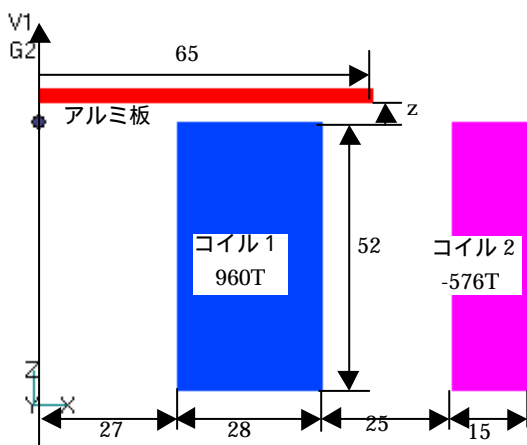


図 3 . TEAM Workshop 問題モデル

V1

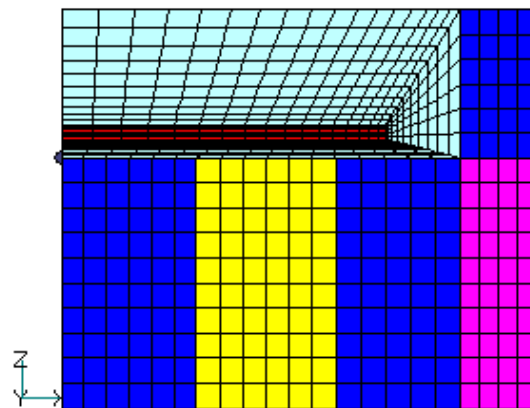


図 4 . 手法 1 でのメッシュ分割

V1

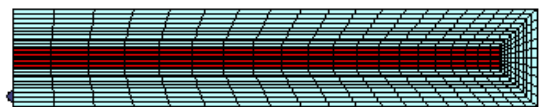


図 5 . 手法 2 でのメッシュ分割

ではこの手法が有効であり、図 5 でも、アルミ板とその周りの空気のみを解析範囲としている。

#### 3.2. 解析結果

図 6 に時間ステップ  $dt$  を 0.1msec で両手法で解析した結果と、報告されている実測結果の  $z$  方向変位の時間変化を示す。実測結果とは、初期の振動振幅がかなり異なっているが、これは他の発表されている結果でも同様であり、実測の方に問題があるようである。両手法も振幅で若干の差異が見られるが、良く一致している。また、実測での周期、振動の減衰、最終的な定常値も良い一致を示している。ここでは、十分な精度を得るため、時間ステップを 0.1msec と小さくしステップ数を 2 秒で 2 万ステップもとっている。解析パラメータは $\theta=2/3, \theta'=0.5$ とし、 $\epsilon_1=10^6, \epsilon_2=0.001\text{mm}$ としている。

計算時間は、手法 1 で 3.3Hr、手法 2 で 5.2Hr となっている。使用計算機は DEC  $\alpha$  433MHz である。手法 2 の場合の方が時間を必要とするのは、各繰り返し毎に、コイル磁場を Bio-Savart 則により積分しているためである。今の場合、問題は 2 次元でありメッシュ数も小さくこのような多ステップの解析が可能であるが、一般の三次元計算を考えると、ステップ数はできるだけ少ないものにしたい。

図 7 に、計算パラメータを変えたときについて示す。

時間ステップを 0.5,1.0msec と大きくして行くと、振幅や最終定常値が 0.1msec のものと離れてくる。 $\theta$ 法のパラメータ  $q$ 、 $q'$  を 1.0 とし、後退差分式にすると、周期まで変わり結果は大きく変わってくる。運動方程式は中心差分のオイラー法で解くのが良いと思われる。また、位置に対する繰り返し計算を省いた場合も、結果は大きく変わり、繰り返し計算の有効性がうかがわれる。

本問題は、運動の周期が 0.17sec 程度であることに對し、励磁電流周期は 0.02sec と小さい。時間ステップは励磁電流周期に較べて充分小さく取る必要があり、多ステップの解析が必要となる。累積誤差が問題にな

ってくる可能性もある。時間ステップを大きく取る場合、結果は  $q$ 、 $q'$  や、繰り返し計算をするかどうか大きく依存し、注意が必要なものと思われる。

図 8,9 に手法 1 で求めた 40,45msec における磁束分布と渦電流分布を示す。40msec はコイル電流がゼロの時点で、アルミ板内の渦電流のみの磁束を示している。45msec はコイル磁場が最大の時点でコイルによるものが圧倒的で、図にはアルミ板による磁場のゆがみを見ることは出来ない。図 10 に 40msec におけるアルミ板内の渦電流分布を示す。渦電流は印可磁場と位相がほぼ 90 度ずれて流れており、レジスティブに流れている。表皮電流は流れず、厚さ方向の分割は充分と思

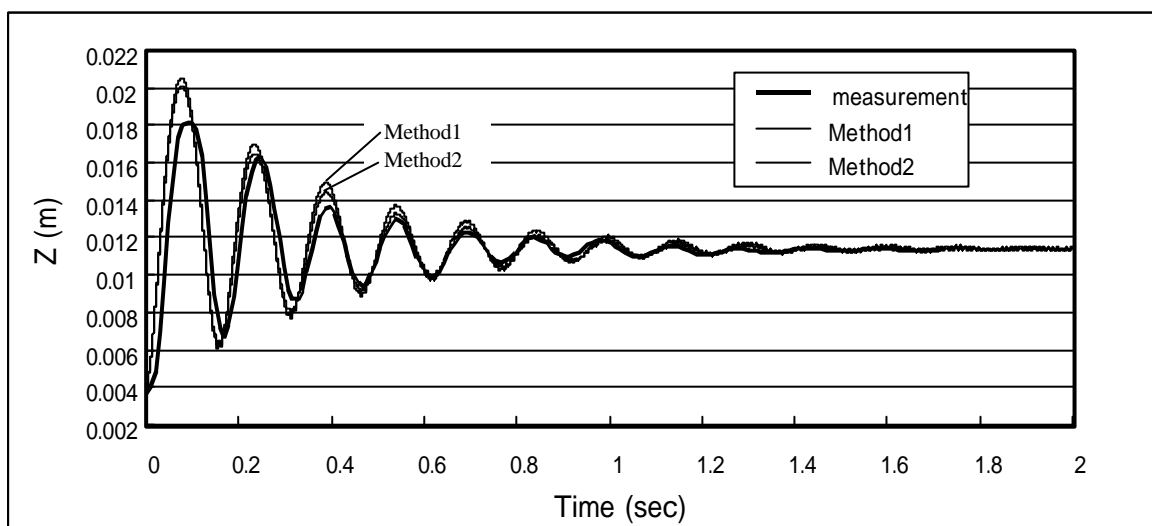


図 6. 計測結果との比較 ( $dt=0.1msec$ )

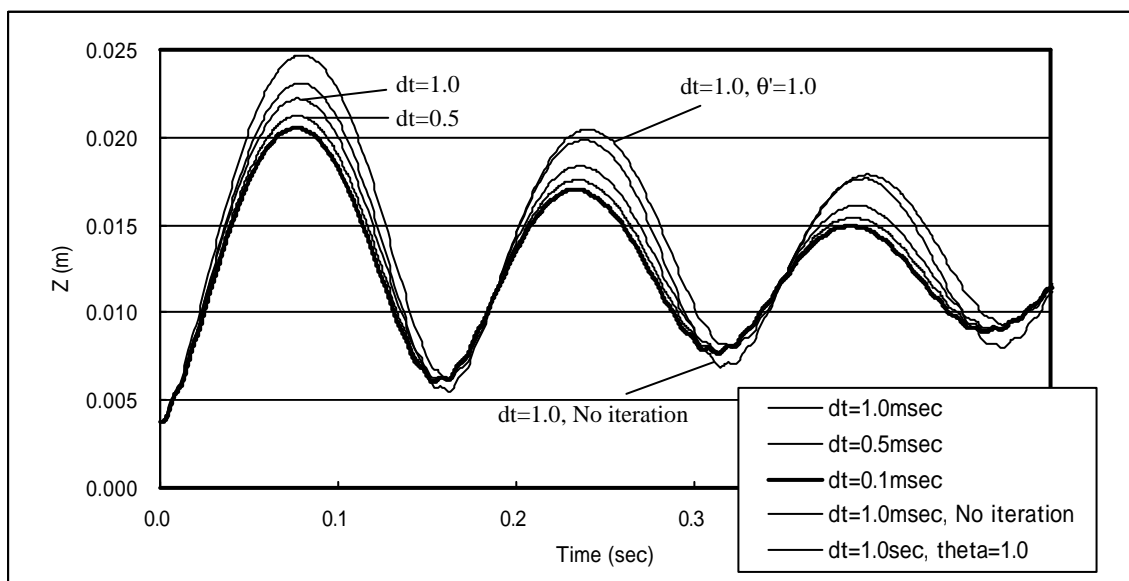


図 7. 計算パラメータによる結果の差

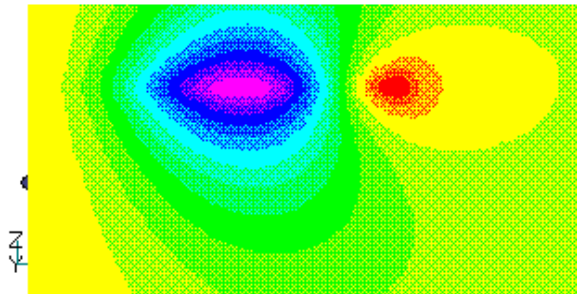


図 8 . 磁束分布 (40msec)

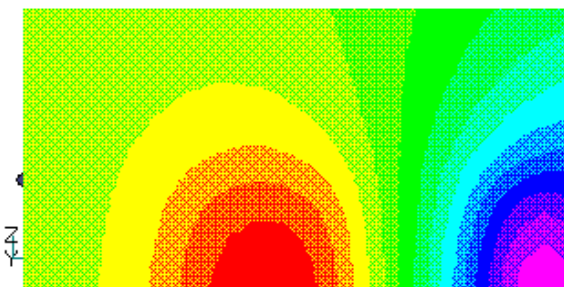


図 9 . 磁束分布 (45msec)

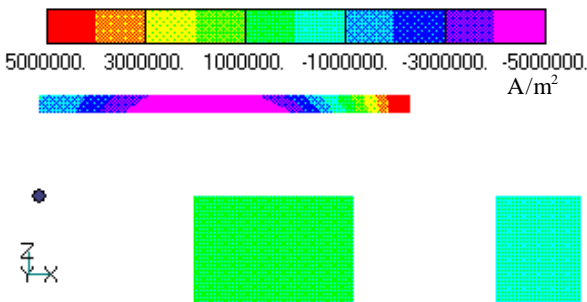


図 1 0 . アルミ板内の渦電流分布(40msec)

われる。

#### 4. まとめ

本稿では、有限要素法において、運動を有限要素メッシュの変形で取り扱い、電磁場方程式と運動方程式の連成について述べた。コネクションの同じメッシュを運動の両端で与え、その間の節点位置は内そうにより求める。電磁場方程式および運動方程式を $\theta$ 法で定式化し、その連成は両方程式の繰り返し収束法により取り扱った。この繰り返し計算は、磁性非線形等の繰り返しループ内に組み込まれ、計算時間の増加ははわずかである。

TEAM Workshop 問題 28 に適用し、報告されている実測結果と良い一致を見た。この問題の場合、変形磁

気ポテンシャルを使ったメッシュを変形させなくても良い方法が可能であり、それとの比較も行い相互の一致を見た。電磁場方程式と運動方程式を繰り返し収束法で解くことが、時間ステップを粗く取ることにに対して有効である。 $\theta$ 値は時間ステップが大きい場合、結果に大きく影響する。運動方程式は、 $q=0.5$  の中間差分で解く方が良さそうである。

ここでは、1自由度の直線運動の軸対称 2次元問題について述べたが、プログラムは一般三次元で作成されており、三次元の一般機器への適用が可能である。また、回転運動に対しても同様な解析が可能である。また、スライド法による滑り運動に対しても、同様に電磁場と運動の連成を可能としており、モーター等の回転機器に対する電磁場運動連成解析が可能である。

#### 参考文献

- [1] H. Karl, J. Fetzer, G. Lehner, and W.M. Rucker, "Preliminary proposal for a new TEAM workshop problem: An Electrodynamical Levitation Device", in *Proc. Of the TEAM Workshop*, Graz, Austria, Sep. 1996, pp. 41-42.
- [2] K. Karl, J. Fetzer, S. Kurz, G. Lehner and W.M. Rucker, "Description of TEAM Workshop Problem 28: An Electrodynamical Levitation Device", in *Proc. of the TEAM Workshop*, Rio de Janeiro, Nov. 7, 1997, pp. 48-51.
- [3] H. Kometani, S. Sakabe and A. Kameari, "3-D Analysis of induction motor with skewed slots using regular coupling mesh", presented COMPUMAG, Sapporo, Japan, Oct., 1999, to be published in *IEEE Transactions on Magnetics*, 2000.
- [4] Y. Kawase, O. Miyatani, T. Yamaguchi and S. Ito, "Numerical Analysis of Dynamic Characteristics of Electromagnets Using 3-D Finite Element Method with Edge Elements", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol.30, no.5, 1994, pp.3248-3251
- [5] K. Tani, R.S. Bains, T. Yamada and Y. Kawase, in *Proc. Of the TEAM Workshop*, Tucson, Arizona, June, 1998, pp. 22-24.
- [6] A. Kameari, "Calculation of transient 3-D current using edge-elements", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 26, no. 2, March 1990, pp.466-469.
- [7] S. Niikura and A. Kameari, "Analysis of eddy current and force in conductors with motion", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 28, no. 2, 1992, pp.1450-1453.
- [8] A. Kameari, "Local force calculation in 3D FEM with edge elements", *International Journal of Applied Electromagnetics in Materials* 3, 1993, pp.231-240.
- [9] 亀有、"有限要素法電磁気解析における種々な手法のアイデア(無限要素、三角形高次要素と高周波固有値問題"、電気学会、静止器・回転機合同研究会資料、SA-97-6, RM-97-65, 1997.